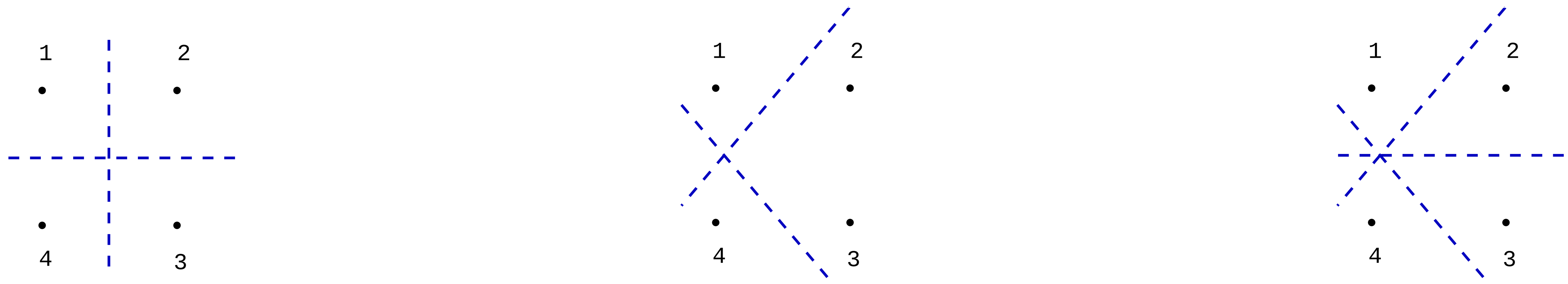
列挙学校、2011年9月28〜30日，神奈川県

集合を粉砕する二分割の集まりはいくつあるか

戸田貴久, Ivo Vigan



(a) 粉砕している　(b) 粉砕していない　(c) 粉砕している

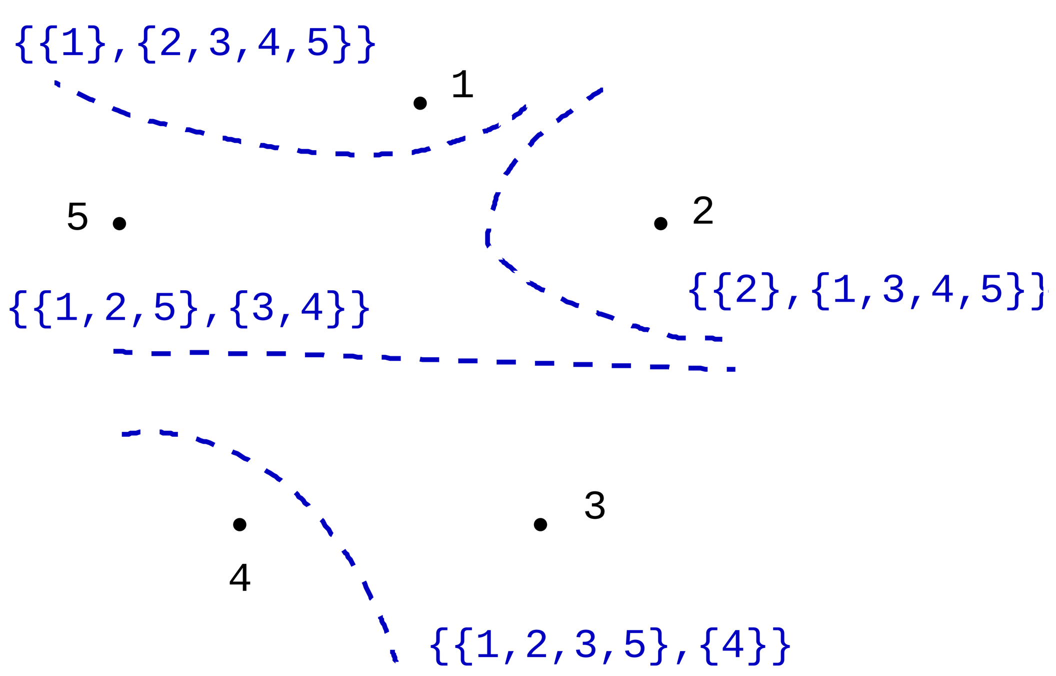
数え上げの対象

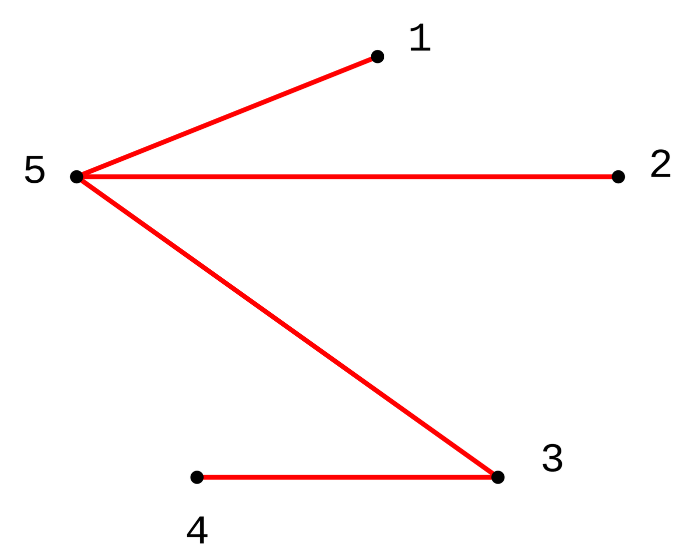
Sを集合とする（要素な何でもかまわない）。

1. Sの分割で高々2個の成分からなるものを**２分割**という。
2. Sの要素aとbが２分割Pによって**カット**されるとは、aとbがPの異なる成分にそれぞれ属するときをいう。
3. Sの２分割の集まり$\mathcal{P}$がSに対する**分離族**とは、どの2個の要素も$\mathcal{P}$に属する２分割によってカットされているときをいう。
4. Sに対する分離族$\mathcal{P}$が**極小**とは、$\mathcal{P}$の真部分族がどれもSに対する分離族でないときをいう。

最大サイズで極小な分離族と全域木との関係

Sがn要素集合のとき、Sの分離族の最大サイズは$n-1$である。





上図のように、最大サイズの極小分離族から、Sを頂点集合とする木を構成できる。逆も同様。Cayley's formulaによれば、K_nにおける全域木はn^{n-2}個なので、n要素集合に対する最大サイズの極小分離族はn^{n-2}個ある。

サイズkのものの数え上げ

簡単のため、$S=\{1,\ldots,n\}$とする。２分割Pのベクトル表現$b(P)$は、サイズnのベクトルでi成分が次で与えられるものと定める。

$$b_i(P)=\begin{cases}1 & P\text{が}1\text{と}i\text{をカットするとき}\\ 0 & \text{そうでないとき}\end{cases}$$

すると、２分割のm組$(P_1,\ldots,P_m)$は$n\times m$行列とみなせる。２分割のm組で表される$n\times m$行列は、１行目がすべて0、それ以外は0か1になっている。

観察 1
「粉砕している」という分割に関する性質は、「どの２行も異なる」という行列に関する性質に対応している。

命題 2
Sを$n\ (\geq 2)$要素集合とする。τ_iはSに対するサイズiの分離族の個数を表す。このとき任意の$k\ (1\leq k\leq 2^{n-1})$に対して次が成り立つ：

$$\sum_{1\leq i\leq k} i!\left\{ {k \atop i} \right\}\tau_i=(2^k-1)(2^k-2)\cdots(2^k-n+1)$$

ここで、$\left\{ {l \atop i} \right\}$は$k$要素を$i$個のブロックに分割する方法の総数、すなわち第2種スターリング数を表す。

定理
Sを$n\ (\geq 2)$要素集合とする。Sに対するサイズkの分離族の個数$\tau_{n,k}$は次で与えられる：

$$\tau_{n,k}=\frac{(n-1)!}{k!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\left[{k \atop i} \right]\binom{2^i-1}{n-1}.$$

ここで、$\left[{k \atop i} \right]$は$k$要素の置換のうち$i$個の巡回置換からなるものの総数、すなわち符号なし第1種スターリング数を表す。