

集合の2分割のなす分離族について

戸田貴久

Ivo Vigan 氏との共同研究

京都大学大学院 人間・環境学研究科 博士課程3年

ERATO セミナー 2011 年 12 月 26 日

発表の概要

- 導入：2分割のおりなすパターン
- 関連問題：Combinatorial Search
- 結果1：最大サイズの極小分離族と全域木の対応関係
- 結果2：任意サイズの分離族の数え上げ

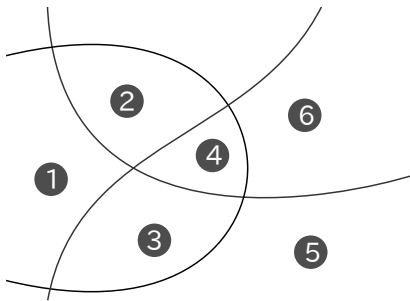
2分割のおりなすパターン

- 集合 S の **2分割** とは、 $\{S\}$ あるいは

$$U \neq \emptyset, \quad V \neq \emptyset, \quad U \cap V = \emptyset, \quad U \cup V = S$$

を満たす $\{U, V\}$ である。

- S の 2分割の集まり $\mathcal{P}$ が **分離族** とは、 S のすべての 2元を $\mathcal{P}$ に属する 2分割で分けられるときをいう。



発表の概要

- 導入：2分割のおりなすパターン
- 関連問題：Combinatorial Search
- 結果1：最大サイズの極小分離族と全域木の対応関係
- 結果2：任意サイズの分離族の数え上げ

さまざまなタイプの探索問題

偽コイン

- n 個のコインの中に 1 個だけ他よりも重いコインがある
- 何回天秤を用いれば重いコインを見つけ出すことができるか

グループテスト

- 血液検査により感染者を見つけて隔離したい
- 複数人の血液を混ぜ合わせ、まとめて分析する
- グループごとの検査を繰り返して、すべて感染者を隔離せよ

ソート

- n 人の卓球選手がいる
- 2 人ごとの比較で、卓球選手の強さの序列を決定せよ

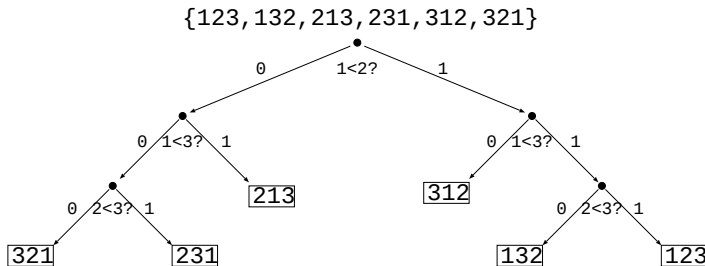
Combinatorial Search

- **探索プロセス***: 集合 S と関数 $f: S \rightarrow \{0,1\}$ の集まり $\mathcal{F}$ の対
- **探索アルゴリズム**: S の元を同定する $\mathcal{F}$ の関数の選び方

(*) 2分探索プロセスと呼ばれる。一般には q 分探索プロセスが考えられる。

S : 探索対象の集まり、 $\mathcal{F}$: テストの集まり

問題: 与えられた探索プロセスにおいて、探索アルゴリズムにより定まる探索木の高さの最小値を求めよ。



$S = \{\{1, 2, 3\} \text{ のすべての置換 }\}, \mathcal{F} = \{f_{i<j}: \text{置換} \mapsto i < j?\}$ のときの探索木

$(S, \mathcal{F})$ においてすべての元を同定できるための条件：

任意の $a, b \in S$ に対して $f(a) \neq f(b)$ を満たす $f \in \mathcal{F}$ がある。

この条件を満たす探索プロセスは**分離系**と呼ばれている (R'enyi 1965)。Katona によるサーベイや Aigner の本に多くの結果がまとめられている。

ところで、関数 $f: S \rightarrow \{0, 1\}$ の代わりに集合 $f^{-1}(1)$ を扱う立場では、探索プロセスは集合 S と $\mathcal{T} \subseteq 2^S$ の対 $(S, \mathcal{T})$

$(S, \mathcal{T})$ が分離系 $\iff$ 任意の $a, b \in S$ に対して $a \in U, b \notin U$ または $a \notin U, b \in U$ を満たす $U \in \mathcal{T}$ がある。

同じ台集合 S 上の分離系と分離族の対応関係：

観察

$(S, \mathcal{T})$ が分離系ならば $\{\{U, S \setminus U\} \mid U \in \mathcal{T}\}$ は分離族である。

上への写像だが 1 対 1 ではない。

発表の概要

- 導入：2分割のおりなすパターン
- 関連問題：Combinatorial Search
- 結果1：最大サイズの極小分離族と全域木の対応関係
- 結果2：任意サイズの分離族の数え上げ

分離族のサイズ

分離族の**サイズ**とは、分離族に属する2分割の個数を意味する。
分離族が**極小**とは、真部分族がどれも分離族でないときをいう。

命題

n 要素集合に対する極小分離族の最大サイズは $n - 1$ である。

証明.

- ① 高々 $n - 1$ であることだけを示す。
- ② 与えられた極小分離族 $\mathcal{P}$ から任意の順番で元を除いていく。

$$\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \setminus \{P_1\} \rightarrow \mathcal{P} \setminus \{P_1\} \setminus \{P_2\} \cdots \rightarrow \mathcal{P} \setminus \{P_1\} \cdots \setminus \{P_m\} = \emptyset.$$

- ③ 最初、 $\mathcal{P}$ によって台集合は n 個のブロックに分割されている。
- ④ $\mathcal{P}$ の極小性から、上の操作が進むにつれブロック数は真に減少していく。よって、 $\mathcal{P}$ のサイズは高々 $n - 1$ である。



最大サイズの極小分離族と全域木

定理

有限集合 S の上の最大サイズの極小分離族の全体と S を頂点集合とする木全体の間には全単射が存在する。

証明のアウトライン.

- ① $\mathcal{P}$ を最大サイズの極小分離族とする。
- ② 2元 $p, q \in S$ が隣接している $\stackrel{\text{def}}{\iff} p$ と q をカットする2分割が $\mathcal{P}$ においてちょうど一つだけ存在する。
- ③ 上で定まる無向グラフ $G(\mathcal{P})$ は S を頂点集合とする木である。
- ④ 写像 $\mathcal{P} \mapsto G(\mathcal{P})$ は全単射である。



最大サイズの極小分離族の数え上げ

定理 (Cayley の公式)

ラベル付き n 頂点の完全グラフにおける全域木の個数 $= n^{n-2}$

系

n 要素集合の上の最大サイズの極小分離族の個数 $= n^{n-2}$

他のサイズの極小分離族の数え上げは未解決

発表の概要

- 導入：2分割のおりなすパターン
- 関連問題：Combinatorial Search
- 結果1：最大サイズの極小分離族と全域木の対応関係
- 結果2：任意サイズの分離族の数え上げ

任意サイズの分離族の数え上げ

問題： n 要素集合において、相異なる m 個の 2 分割からなる分離族の個数を求めよ。

結果：分離族が $\{S\}$ を含んでもよい場合：

$$\frac{(n-1)!}{m!} \sum_{i=1}^m (-1)^{m-i} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix} \binom{2^i-1}{n-1}, \quad \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1-i} \begin{bmatrix} n \\ i+1 \end{bmatrix} \binom{2^i}{m}$$

分離族が $\{S\}$ を含まない場合：

$$\frac{(n-1)!}{m!} \sum_{i=1}^m (-1)^{m-i} \begin{bmatrix} m+1 \\ i+1 \end{bmatrix} \binom{2^i-1}{n-1}, \quad \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1-i} \begin{bmatrix} n \\ i+1 \end{bmatrix} \binom{2^i-1}{m}$$

ここで $\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ は $x(x-1)\cdots(x-s+1)$ を展開したときの x^t の係数の絶対値、すなわち、符号なし第 1 種スターリング数を表す。

方針：分離族を行列で表現して、行列の数え上げに帰着

一般性を失うことなく台集合を $S = \{1, 2, \dots, n\}$ と仮定する。

接続行列

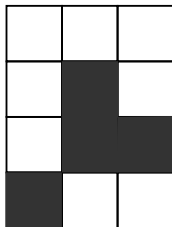
例：2分割の組 (P, Q, R) に対する接続行列

$$P = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$$

$$Q = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$$

$$R = \{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



白黒の盤面による表示

2分割 P のベクトル表示 $b(P) = (b_1(P), \dots, b_n(P))$ を以下で与える：

$$b_i(P) = \begin{cases} 1 & 1 \text{ と } i \text{ が } P \text{ の異なる成分にあるとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

2分割の組 $(P_1, P_2, \dots, P_m)$ に対する**接続行列**は、第 j 行ベクトルが $b(P_j)$ となる行列である。

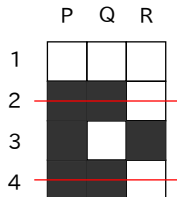
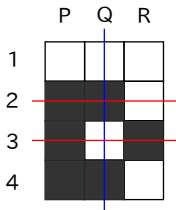
観察

n 要素集合上の 2 分割からなる m 組全体 $\cong n$ 行 m 列の $(0, 1)$ -行列で 1 行目がすべて 0 であるものの全体

(注) 2 分割の、集まりでなく、順序づけられた組 である。したがって、同じ要素が複数現れる組も許される。

観察

2 分割の集まりが分離族をなす $\iff$ 接続行列の行ベクトルは相異なる。



- $\tau_{n,i}$: n 要素集合上で相異なる i 個の 2 分割からなる分離族の個数
 (分離族は $\{S\}$ を含んでも **よい**とする)
- $\left\{ \begin{smallmatrix} m \\ i \end{smallmatrix} \right\}$: m 要素集合の i 個のブロックへの分割の総数
 (第 2 種スターリング数)

命題

$$\sum_{i=1}^m i! \left\{ \begin{smallmatrix} m \\ i \end{smallmatrix} \right\} \tau_{n,i} = (2^m - 1)(2^m - 2) \cdots (2^m - n + 1)$$

証明.

- ① 右辺 = $n \times m$ の接続行列で行ベクトルが相異なるものの総数
- ② 各接続行列は、相異なる 2 分割 $P_1, \dots, P_i$ ($i \leq m$) から重複を許してそれぞれ最低 1 回は選び、合計 m 個を並べたもの
- ③ 各 i に対して、そのような接続行列の個数 = $i! \left\{ \begin{smallmatrix} m \\ i \end{smallmatrix} \right\} \tau_{n,i}$
- ④ なぜなら、上の $\{P_1, \dots, P_i\}$ の選び方 = $\tau_{n,i}$
 m 個の場所を $P_1, \dots, P_i$ へ割り当てる方法 = $i! \left\{ \begin{smallmatrix} m \\ i \end{smallmatrix} \right\}$



分離族が $\{S\}$ を含んでもよい場合 (m に関する和公式)

$\tau_{n,m}$: n 要素集合で相異なる m 個の 2 分割からなる分離族の個数
(分離族は $\{S\}$ を含んでもよいとする)

$\left[\begin{smallmatrix} m \\ i \end{smallmatrix} \right]$: $x(x-1)\cdots(x-m+1)$ を展開したときの x^i の係数の絶対値
(符号なし第 1 種スターリング数)

定理

$$\tau_{n,m} = \frac{(n-1)!}{m!} \sum_{i=1}^m (-1)^{m-i} \left[\begin{smallmatrix} m \\ i \end{smallmatrix} \right] \binom{2^i - 1}{n-1}$$

証明. 前命題にスターリングの反転公式を適用して得られる。□

分離族が $\{S\}$ を含まない場合 (m に関する和公式)

$\sigma_{n,m}$: n 要素集合で相異なる m 個の 2 分割からなる分離族の個数
(分離族は $\{S\}$ を含まないとする)

定理

$$\sigma_{n,m} = \frac{(n-1)!}{m!} \sum_{i=1}^m (-1)^{m-i} \begin{bmatrix} m+1 \\ i+1 \end{bmatrix} \binom{2^i - 1}{n-1}$$

証明のアウトライン.

$$\begin{aligned}\tau_{n,m} &= \text{分離族が } \{S\} \text{ を含んでもよい場合の数} \\ &= \text{分離族が } \{S\} \text{ を含まない場合の数} + \{S\} \text{ を含む場合の数} \\ &= \sigma_{n,m} + \sigma_{n,m-1}\end{aligned}$$

よって $\sigma_{n,m} = \sum_{j=1}^m (-1)^{m-j} \tau_{n,j}$ と前定理から、本定理を得る。□

隣接行列の転置

[S] P Q R

$$P = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$$

$$Q = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}$$

$$R = \{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}$$

[S] P' Q' R'

$$P' = \{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}$$

$$Q' = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$$

$$R' = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$$

命題

$$\sigma_{n,m-1}(m-1)! = \sigma_{m,n-1}(n-1)!$$

証明.

- ① 左辺 = 1 列目がすべて 0 の $n \times m$ の隣接行列で、相異なる行ベクトル、相異なる列ベクトルからなるものの総数
- ② 右辺 = 1 列目がすべて 0 の $m \times n$ の隣接行列で、相異なる行ベクトル、相異なる列ベクトルからなるものの総数



n に関する和公式

分離族が $\{S\}$ を含まない場合：

定理

$$\sigma_{n,m} = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1-i} \left[\begin{matrix} n \\ i+1 \end{matrix} \right] \binom{2^i - 1}{m}$$

分離族が $\{S\}$ を含んでもよい場合：

定理

$$\tau_{n,m} = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1-i} \left[\begin{matrix} n \\ i+1 \end{matrix} \right] \binom{2^i}{m}$$

$\tau_{n,m}$ と $\sigma_{n,m}$ の公式から GNU bc を使い計算した結果

n	$\tau_{n,2}$	$\tau_{n,3}$	$\tau_{n,4}$	$\tau_{n,5}$	$\tau_{n,6}$	$\tau_{n,7}$
2	1	0	0	0	0	0
3	3	4	1	0	0	0
4	3	32	64	56	28	8
5	0	140	1155	3808	7728	11360
6	0	420	14385	140616	788452	3194936
7	0	840	148890	4118856	57325156	552529336
8	0	840	1350090	107740920	3600616572	78193179208
9	0	0	10810800	2628990000	210286204632	10083129961104

n	$\sigma_{n,2}$	$\sigma_{n,3}$	$\sigma_{n,4}$	$\sigma_{n,5}$	$\sigma_{n,6}$	$\sigma_{n,7}$
2	0	0	0	0	0	0
3	3	1	0	0	0	0
4	3	29	35	21	7	1
5	0	140	1015	2793	4935	6425
6	0	420	13965	126651	661801	2533135
7	0	840	148050	3970806	53354350	499174986
8	0	840	1349250	106391670	3494224902	74698954306
9	0	0	10810800	2618179200	207668025432	9875461935672

まとめ

- ① 分離族の概念導入
- ② Combinatorial Search との関連
- ③ 最大サイズの極小分離族と全域木の対応関係
- ④ 任意サイズの分離族の数え上げ

参考文献

- ① C. ベルジュ：組合せ論の基礎、サイエンス社、1973 年
- ② R.L. グレアム、D.E. クヌース、O. パタシュニク：コンピュータの数学、共立出版、1993 年
- ③ A.Rényi. On the theory of random search. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 71:809-828,1965.
- ④ G.O.H.Katona. Rényi and the combinatorial search problems. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 26:363-378, 1991.
- ⑤ M.Aigner. *Combinatorial Search*. John Wiley & Sons, 1988