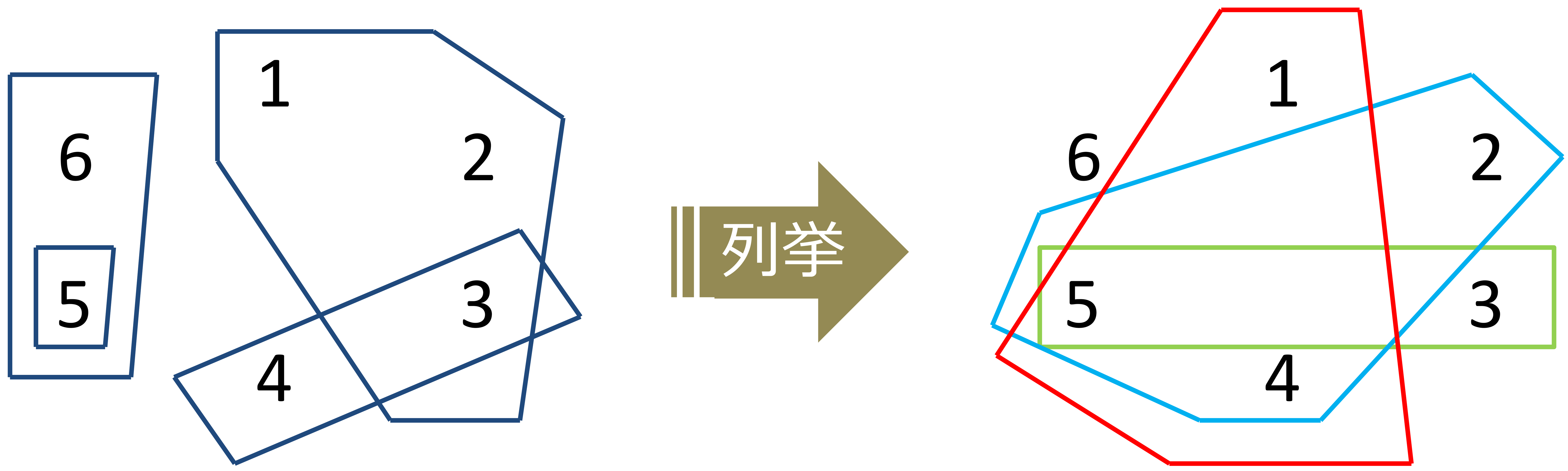
二分決定グラフに基づくハイパーグラフ極小横断の列挙

戸田貴久 toda@erato.ist.hokudai.ac.jp



入力：集合の集まり（ハイパーグラフ）　　**出力：**すべての極小横断（横断ハイパーグラフ）

1. 基本概念

- 台集合 V とその部分集合の集まり F の対 (V, F) をハイパーグラフと呼ぶ。 F の元をハイパーエッジと呼ぶ。
- ハイパーグラフ (V, F) の横断とは、すべてのハイパーエッジと交わる V の部分集合である。
- ハイパーグラフ (V, F) のすべての極小横断からなるハイパーグラフを (V, F) の横断ハイパーグラフと呼ぶ。

2. 背景

極小横断の列挙は集合の集まりに関する基本的な問題であり、データマイニング、論理、人工知能をはじめとする幅広い研究分野に応用がある。

本問題は単調論理関数の双対化と等価であり、理論的な観点からは計算量の解析が注目されてきた。1996年FredmanとKhachiyanにより提案されたアルゴリズムを用いることで入出力サイズに関して準多項式時間で解けることまでは分かっているが、多項式時間で解けるか否かはいまだに分かっていない。

一方、幅広い応用があるため、実際的に効率の良いアルゴリズムの開発が盛んに行われている。中でも、村上と宇野により提案された探索に基づく手法は、既存手法の中でも優れた性能を示すことが実験的に分かっている。

3. 論理関数との関係

- 論理関数 f の双対論理関数とは $f^d(x_1,\dots,x_n) := \overline{f}(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n)$
- 論理関数f が単調とは $u \le v$ ならば $f(u) \le f(v)$
- 単調論理関数の双対化：単調論理関数 f のCNF Φ が与えられるとき、その双対 f^d の主CNF Ψ を求めよ！

例） $\Phi = (x1 \lor x2 \lor x3) \land (x3 \lor x4) \land (x5 \lor x6)$ のとき
この双対は $(x1 \land x2 \land x3) \lor (x3 \land x4) \lor (x5 \land x6)$と表される。
これを主CNFに変形すると

上図の横断ハイパーグラフに対応

$\Psi = (x3 \lor x5) \land (x1 \lor x4 \lor x5) \land (x2 \lor x4 \lor x5)$ を得る。

（補足）単調論理関数は、否定記号を用いないで論理積と論理和だけで記述される論理関数に対応する。単調論理関数の双対は単調である。論理関数 f によって含意される節のうち極小なものを主節と呼び、すべての主節の論理積形を f の主CNFと呼ぶ。

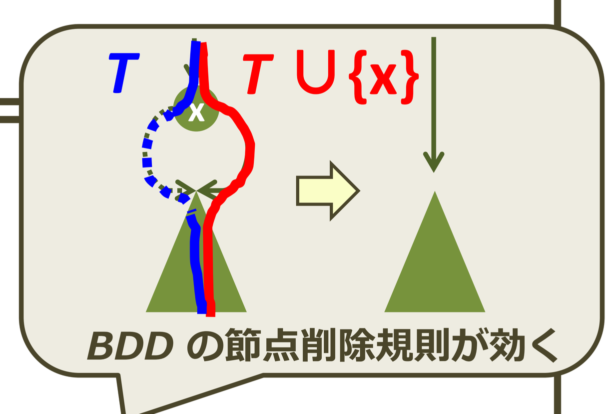
貢献

- 二分決定グラフを用いた列挙手法（Knuth法）を改善
- 村上・宇野法（既存手法中、計算機実験で優れた性能を達成）と比較し、多くのデータで提案法がより高速に動作することを確認

3. 二分決定グラフに基づく算法

1997年Courdertは、多くの計算困難なグラフ組合せ問題（例えば、最大独立集合、最小クリーク分割、最小支配集合など）に対して、ZDDを用いた計算の枠組みを与えた。これに基づき、Knuthは「The Art of Computer Programming」（4a巻）の練習問題としてZDDを用いた極小横断の列挙法を与えた。残念ながら、Knuth法の計算量、他の既存手法との比較結果などは知られておらず、その性能は不明であった。

4. 提案手法



① 入力ハイパーグラフのZDDを構築
② ZDDからすべての横断からなるBDDを構築
③ BDDからすべての極小集合からなるZDDを構築
④ ZDDを解凍し、横断ハイパーグラフを出力

中間BDDサイズが性能を左右

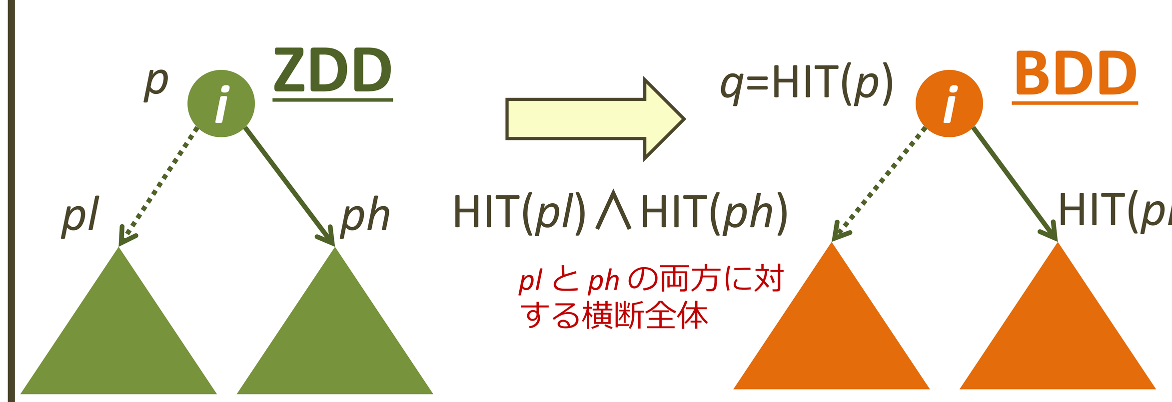


図1．ステップ②を計算する再帰関数HIT

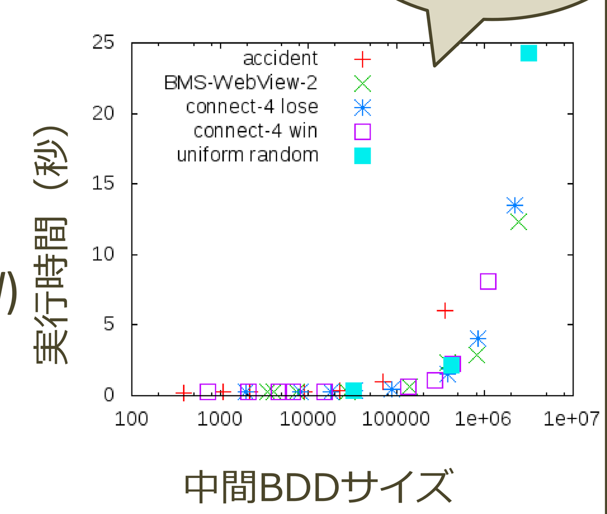


図2．ステップ②と③の実行時間

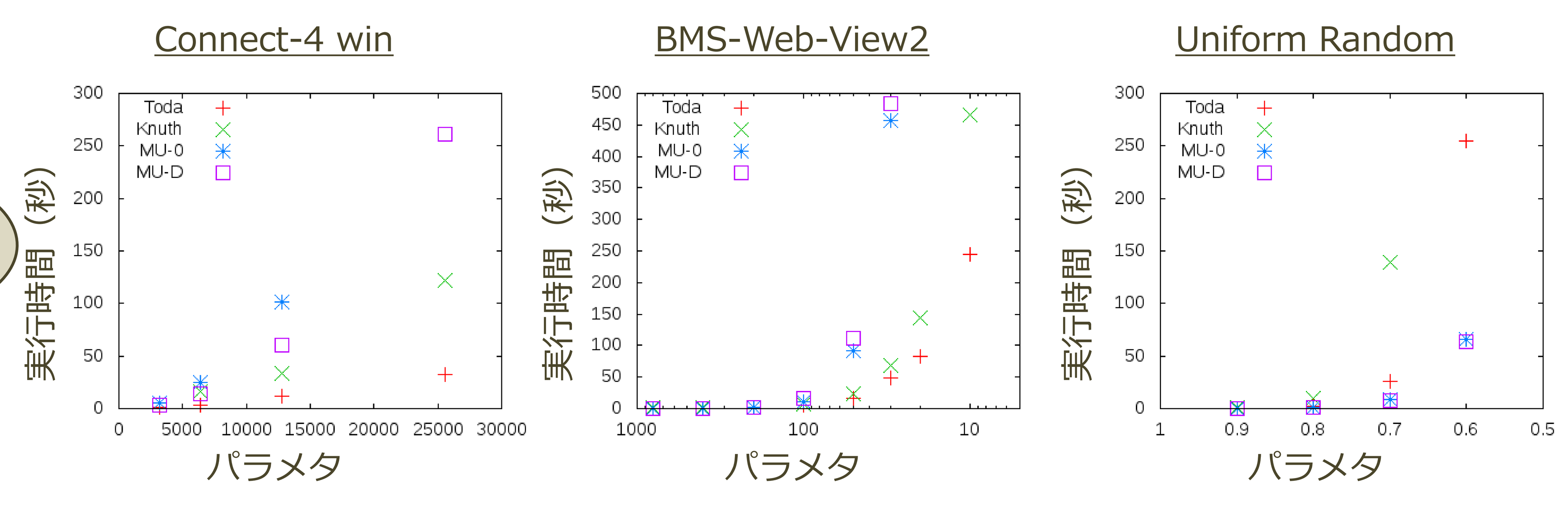


図3．提案手法、Knuth法、村上・宇野法（MU-0とMU-D）の実行時間比較

ERATO湊離散構造処理系プロジェクト「2013年度初夏のワークショップ」6月28-29日